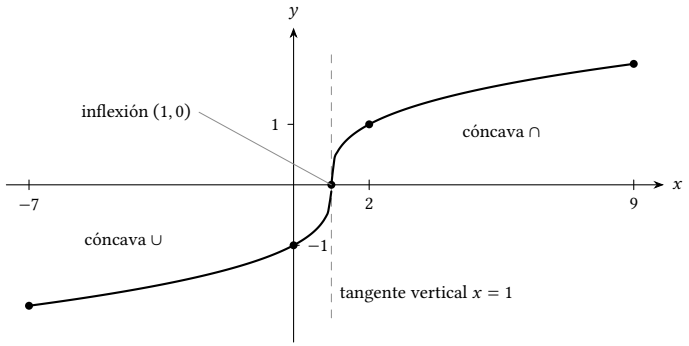



**Resultado:** a) creciente en $(-\infty, \infty)$, nunca decreciente; b) no tiene extremos relativos ($x = 1$ es crítico, con tangente vertical); c) cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1)$ y hacia abajo en $(1, \infty)$; inflexión en $(1, 0)$.

### Ejercicio 5.5.4 · Extremos relativos y absolutos

*Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 7.*

Para $f(x) = (1 + x)(x - 1)^2$ obtenga: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus máximos y mínimos relativos; c) el máximo y el mínimo absolutos en $[-1, 1]$. Trace la gráfica.

**Resolución.**

1. Desarrollando, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$; dominio $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$. Críticos: $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$.
3. Signo de $f'$: positivo en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, negativo en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, positivo en $(1, \infty)$.
4. Valores: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$ y $f(1) = 2 \cdot 0 = 0$.
5. b) En $-\frac{1}{3}$, $f'$ pasa de + a −: máximo relativo. En 1, de − a +: mínimo relativo. (Con la segunda derivada, $f''(x) = 6x - 2$: $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$ y $f''(1) = 4 > 0$.)
6. c) $f$ es continua en $[-1, 1]$. Valores en los críticos y en los extremos del intervalo:

$$f(-1) = 0, \qquad f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{32}{27}, \qquad f(1) = 0.$$

7. Para la gráfica: inflexión en $x = \frac{1}{3}$ ($f''$ cambia de signo), con $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$; $f(0) = 1$, $f(2) = 3$.



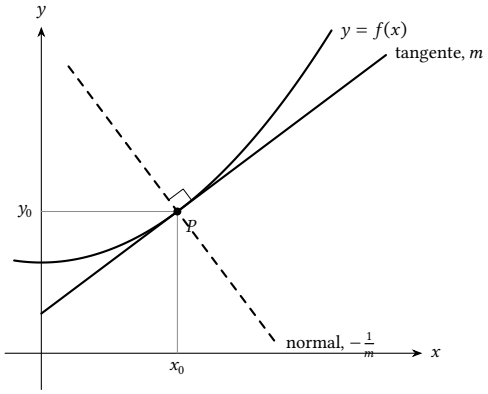


**Orden superior.** $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ es la derivada de $y'$; $y'''$, la de $y''$, y así sucesivamente.

**Recta tangente y recta normal.** En $P(x_0, y_0)$ de la curva, con $m = y'(x_0)$:

$$\text{tangente: } y - y_0 = m(x - x_0), \qquad \text{normal: } y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

La normal es perpendicular a la tangente. Si $m = 0$, la tangente es horizontal ($y = y_0$) y la normal vertical ($x = x_0$).

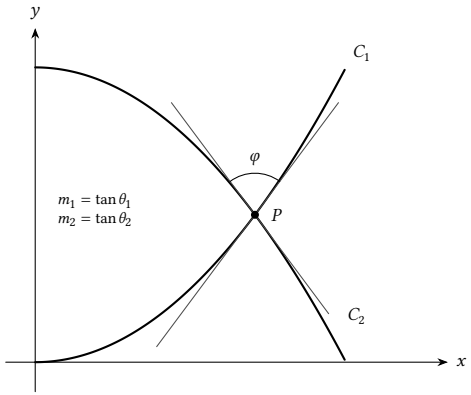



**Rectas paralelas y perpendiculares.** La recta $Ax + By + C = 0$ tiene pendiente $-\frac{A}{B}$. Dos rectas son paralelas si $m_1 = m_2$ y perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$.

**Ángulo entre dos curvas.** En un punto de intersección, es el ángulo agudo $\varphi$ entre sus tangentes. Con pendientes $m_1$ y $m_2$:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

Si $1 + m_1 m_2 = 0$, las curvas se cortan en ángulo recto ($\varphi = 90°$); si $m_1 = m_2$, son tangentes entre sí ($\varphi = 0$).



5. **Justificación.** $A''(x) = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8} > 0$ para toda $x$: el crítico es mínimo y, como es el único, es el mínimo absoluto en $[0, 60]$. (Comprobación: $A(0) = 225$ y $A(60) = 100\sqrt{3} \approx 173.2$, mayores que $A \approx 97.9$ en el crítico.)
6. **Otra parte:** $60 - x = \frac{660-1620+720\sqrt{3}}{11} = \frac{240(3\sqrt{3}-4)}{11}$.

**Resultado:** para el triángulo, $\frac{180(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 33.90$ cm; para el cuadrado, $\frac{240(3\sqrt{3}-4)}{11} \approx 26.10$ cm.

## 5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 5.5.1 · Valor medio con una raíz cuadrada

*Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.*

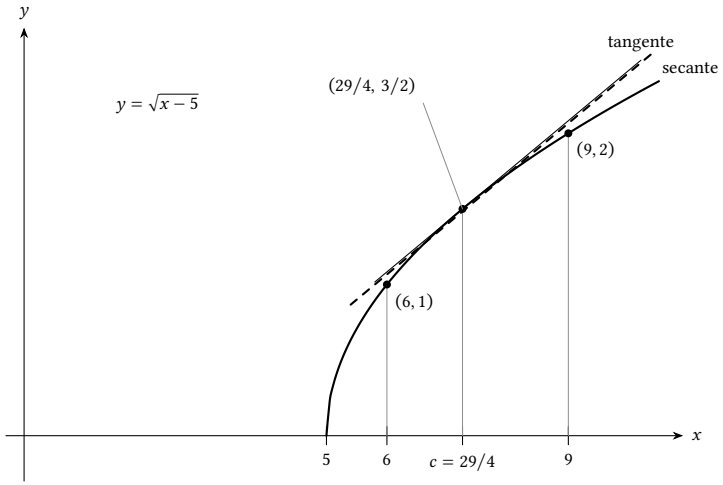
Sea $f(x) = \sqrt{x-5}$ en el intervalo $[6, 9]$. Determine si se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial y, en caso afirmativo, obtenga el o los valores de $x$ donde se cumple la tesis.

**Resolución.**

1. **Continuidad en** $[6, 9]$**.** La raíz está definida y es continua para $x \geq 5$, y $[6, 9]$ está contenido ahí. Se cumple.
2. **Derivabilidad en** $(6, 9)$**.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}$ existe para $x > 5$. Se cumple.
3. **Pendiente de la secante:** $f(6) = 1$, $f(9) = 2$:

$$\frac{f(9) - f(6)}{9 - 6} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. **Tesis:** $\frac{1}{2\sqrt{c-5}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{c-5} = \frac{3}{2} \Rightarrow c - 5 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{29}{4} = 7.25$, que está en $(6, 9)$.








| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «recta tangente», «recta normal» en un punto | pendiente y punto-pendiente | 4.3.6 |
| tangente «horizontal», «paralela» o «perpendicular» a una recta | igualar $y'$ a la pendiente pedida | 4.3.6 |
| «área del triángulo» con los ejes o con la normal | intersecciones de las rectas | 4.3.6 |
| «ángulo de intersección» entre curvas o con una recta | $\tan\varphi$ con las dos pendientes | 4.3.7 |
| «rapidez», «razón», «a qué ritmo», unidades por segundo o por minuto | razón de cambio relacionada | 4.3.8 |
| «aproximar», «estimar», «diferencial» | $dy = f'(x)\,dx$ | 4.3.9 |
| $y = f(x)^{g(x)}$, productos y cocientes grandes SOLO PLAN 2016 | derivación logarítmica | 4.3.10 |

## 4.3 Procedimientos

*4.3.1 Derivada por definición (cuatro pasos)*

1. Escribe $f(x+h)$: cambia cada $x$ por $(x+h)$.
2. Calcula el incremento $f(x+h) - f(x)$ y simplifícalo (denominador común, desarrollo de binomios).
3. Divide entre $h$. Antes de pasar al límite hay que **cancelar el factor** $h$: factoriza o racionaliza (multiplica por el conjugado).
4. Toma el límite cuando $h \to 0$, sustituyendo $h = 0$.

Ejemplo breve: con $f(x) = x^2$, $\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h \to 2x$.

*4.3.2 Derivada con reglas y regla de la cadena*

1. Reescribe antes de derivar: raíces como potencias ($\sqrt[4]{x+1} = (x+1)^{1/4}$), $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$.
2. Identifica la operación «de afuera» (potencia, cociente, ang tan, sen…) y aplica su fórmula; multiplica por la derivada de lo de adentro. Repite capa por capa.
3. Simplifica: factor común, denominador común, $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$.
4. Si se pide $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ o una segunda derivada evaluada, sustituye solo al final.

*4.3.3 Derivabilidad de una función por partes*

1. En cada punto de unión $x_0$, **continuidad**: el valor de la regla izquierda en $x_0$ igual al de la regla derecha.
2. **Derivabilidad**: deriva cada regla y exige que las derivadas en $x_0$ coincidan (derivadas laterales iguales).
3. Resuelve el sistema para las constantes. Si sobran ecuaciones, comprueba que todas se cumplan.
4. Si la función no es continua en $x_0$, no es derivable ahí, aunque las pendientes coincidan.

## 5.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Análisis completo de una cúbica**

*Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 5.*

Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$, determine: a) los intervalos donde es creciente o decreciente; b) sus valores máximos y mínimos relativos; c) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia abajo o hacia arriba.

**Resolución.**

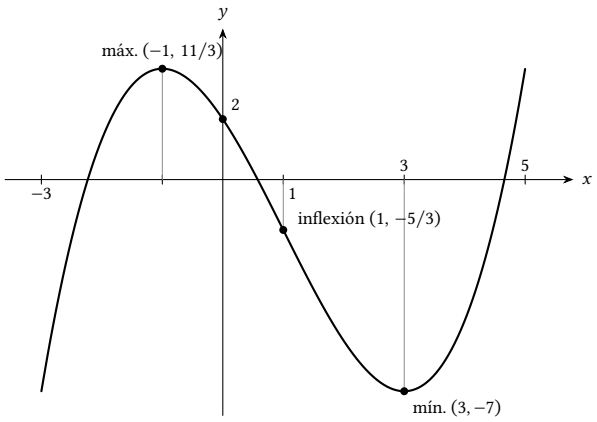
1. Polinomio: dominio $\mathbb{R}$. Primera derivada factorizada:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1).$$

   Valores críticos: $x = -1$ y $x = 3$.
2. Valores de $f$: $f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 2 = \frac{11}{3}$ y $f(3) = 9 - 9 - 9 + 2 = -7$.
3. Segunda derivada: $f''(x) = 2x - 2$; se anula en $x = 1$, con $f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -\frac{5}{3}$.
4. Tabla de variación (valores de prueba $-2$, 0, 2, 4):

| | $x < -1$ | $-1$ | | $1$ | | $3$ | $x > 3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $\frac{11}{3}$ | $\searrow$ | $-\frac{5}{3}$ | $\searrow$ | $-7$ | $\nearrow$ |

5. a) $f' > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$; $f' < 0$ en $(-1, 3)$.
6. b) En $x = -1$, $f'$ cambia de + a − (y $f''(-1) = -4 < 0$): máximo relativo. En $x = 3$, de − a + (y $f''(3) = 4 > 0$): mínimo relativo.
7. c) $f'' < 0$ en $(-\infty, 1)$ y $f'' > 0$ en $(1, \infty)$: la concavidad cambia en $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$, punto de inflexión.
8. Gráfica: además, $f(0) = 2$, $f(-3) = -7$ y $f(5) = \frac{11}{3}$.








semejantes, trigonometría). Si aparece una variable de más, elimínala con un dato fijo o una relación.
4. **Derivar respecto a $t$.** Cada variable produce su razón por la regla de la cadena: $\frac{d}{dt}r^3 = 3r^2\frac{dr}{dt}$.
5. **Sustituir al final** los valores del instante, despejar y dar el resultado con unidades y sentido (aumenta o disminuye).

No sustituyas el valor del instante antes de derivar: una variable con valor fijo tendría derivada cero.

### *4.3.9 Diferencial y aproximación*

1. Elige $f$, un valor $x$ donde $f(x)$ sea fácil ($\sqrt{16}$, sen $\frac{\pi}{6}$) y el incremento $dx = \Delta x$.
2. Calcula $dy = f'(x)\,dx$.
3. Aproxima $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$, o el cambio $\Delta y \approx dy$.

### *4.3.10 Derivación logarítmica y $f(x)^{g(x)}$* SOLO PLAN 2016

1. Si la variable está en la base y en el exponente, $y = f(x)^{g(x)}$, no sirven ni $(u^n)'$ ni $(a^u)'$. Toma logaritmo natural: $\ln y = g(x)\ln f(x)$.
2. Deriva implícitamente: $\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$.
3. Multiplica por $y$ y sustituye $y = f(x)^{g(x)}$.
4. El mismo método simplifica productos y cocientes largos: el logaritmo los vuelve sumas.

## 4.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Tangente y normal con derivación implícita**

*Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 4.*

Obtenga las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ en el punto $A(1, 1)$.

**Resolución.**

1. El punto está en la curva: $1 + 3 + 1 = 5$.
2. Derivación implícita, con regla del producto en $3xy$:

$$2x + 3\,(y + xy') + 2yy' = 0.$$

3. Se agrupan los términos con $y'$ y se despeja:

$$(3x + 2y)\,y' = -(2x + 3y) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

4. Pendiente en $A(1, 1)$: $m = -\frac{2+3}{3+2} = -1$. La normal tiene pendiente $-\frac{1}{m} = 1$.
5. Tangente: $y - 1 = -(x - 1)$, es decir, $x + y - 2 = 0$.
6. Normal: $y - 1 = 1(x - 1)$, es decir, $x - y = 0$.

**Resultado:** tangente $x + y - 2 = 0$; normal $x - y = 0$.

| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «cóncava hacia arriba o hacia abajo», «puntos de inflexión», «criterio de la segunda derivada» | signo de $f''$ | 5.3.3 |
| «trazar la gráfica», «bosquejar» | tabla de variación | 5.3.4 |
| raíces o potencias fraccionarias: $\sqrt[3]{x-1}$, $x^{2/3}$ | críticos donde $f'$ no existe | 5.3.4 |
| «máximo y mínimo absolutos» en $[a,b]$ | críticos y extremos del intervalo | 5.3.5 |
| «dimensiones para que el área (volumen) sea máxima», «material mínimo», «costo mínimo» | optimación | 5.3.6 |
| «obtener $a$ y $b$ para que haya un punto de inflexión en $(x_0, y_0)$» | dos ecuaciones | 5.3.7 |

## 5.3 Procedimientos

*5.3.1 Teoremas de Rolle y del valor medio*

1. Escribe las hipótesis del teorema que pide el enunciado y revisa **una por una**, terminando cada una con «se cumple» o «no se cumple»:
   - **Continuidad en $[a,b]$:** polinomios, sen y cos son continuos siempre; un cociente, donde el denominador no se anula; una raíz par, donde el radicando es $\geq 0$.
   - **Derivabilidad en $(a,b)$:** calcula $f'$ y revisa dónde no existe (denominador cero, raíz de cero en el denominador).
   - **Solo Rolle:** $f(a) = f(b)$**.** Evalúa los dos extremos.
2. Si una hipótesis no se cumple, el teorema no se puede aplicar (puede o no existir $c$): dilo y termina.
3. Si se cumplen, plantea $f'(c) = 0$ (Rolle) o $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (valor medio) y resuelve.
4. Conserva solo las soluciones del intervalo *abierto* $(a,b)$.

*5.3.2 Crecimiento y extremos relativos*

1. Dominio de $f$.
2. Deriva y **factoriza** $f'$. Valores críticos: los ceros de $f'$ y los puntos del dominio donde $f'$ no existe.
3. Los críticos y los puntos fuera del dominio parten la recta en intervalos. Toma un valor de prueba en cada uno y anota el signo de $f'$.
4. $f' > 0$: creciente; $f' < 0$: decreciente.
5. Criterio de la primera derivada en cada crítico; evalúa $f$ en los extremos: el valor máximo o mínimo es $f(c)$.

*5.3.3 Concavidad, inflexión y criterio de la segunda derivada*

1. Calcula $f''$ y factorízala. Candidatos: ceros de $f''$ y puntos del dominio donde $f''$ no existe.
2. Signo de $f''$ en cada intervalo: + es cóncava hacia arriba, − hacia abajo.





1. a) Con $u = 3x$, $u' = 3$, y la fórmula de ang sec $u$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{|3x|\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}, \qquad |x| > \tfrac{1}{3}.$$

   Con la fórmula sin valor absoluto queda $\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}$, igual para $x > \frac{1}{3}$.
2. b) Se reescribe $y = x^{1/2} - x^{-1/2}$ y se aplica la regla de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$$

**Resultado:** a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

### Ejercicio 4.5.2 · Continua y derivable: tres reglas

*Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 3.*

Determine los valores reales de $a$ y $b$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } -8 \leq x < -1, \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ -\frac{x^2}{2} - 7 & \text{si } 2 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

sea continua en $[-8,5]$ y derivable en $(-8,5)$.

**Resolución.**

1. Las tres reglas son polinomios: solo hay que revisar las uniones $x = -1$ y $x = 2$. Derivadas de las reglas: $2x$, $a$ y $-x$.
2. En $x = -1$. Continuidad: $(-1)^2 - 4 = -a + b$, es decir, $-a + b = -3$. Derivabilidad: $2(-1) = a$, así que $a = -2$.
3. Entonces $b = -3 + a = -5$.
4. En $x = 2$, con $a = -2$ y $b = -5$. Continuidad: $2a + b = -9$ y $-\frac{4}{2} - 7 = -9$. Se cumple. Derivabilidad: $a = -2$ y $-x\big|_{x=2} = -2$. Se cumple.
5. Las cuatro condiciones se satisfacen con los mismos valores: la recta $y = -2x - 5$ es tangente a las dos parábolas en los puntos de unión.

# Unidad 5 · Variación de funciones: análisis de la gráfica, optimación y valor medio

↑ Volver al índice

**Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno hará el análisis de la variación de funciones para conocer las características geométricas de la gráfica de una función y lo aplicará en la resolución de problemas de optimación.

**Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 5).** El alumno analizará la variación de una función real de variable real para identificar las características geométricas de su gráfica y resolverá problemas de optimación.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia:** Plan 2010: en los 10 finales revisados hay al menos un problema de esta unidad (11 problemas: optimación 6, análisis de la gráfica 4 y valor medio 1). Plan 2016: en 35 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (2016-1 a 2026-2) hay un problema: optimación 16, análisis de la gráfica 14, teorema de Rolle 3 y extremos absolutos en un intervalo cerrado 2. Además salen 8 problemas en los segundos parciales: valor medio, análisis, optimación y un punto de inflexión con parámetros.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 5.1 (20 min): los cuatro teoremas, los criterios de la primera y la segunda derivada y la concavidad.
  2. Aprende la tabla de variación (sección 5.3.4) y la plantilla de optimación (sección 5.3.6): con ellas se resuelve casi todo.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 5.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro: 20 min cada uno. La optimación es la mitad de los problemas: no te saltes los ejercicios 5.5.6 a 5.5.8.

## 5.1 Conceptos y expresiones

**Extremos.** Una función $f$ tiene un *máximo relativo* en $c$ si $f(c) \geq f(x)$ para toda $x$ cercana a $c$, y un *mínimo relativo* si $f(c) \leq f(x)$ para toda $x$ cercana a $c$. Si la desigualdad vale para toda $x$ de un intervalo $I$, el extremo es *absoluto* en $I$. El *valor* máximo es $f(c)$; el punto de la gráfica es $(c, f(c))$.

**Valor crítico.** Un número $c$ del dominio de $f$ es crítico si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no existe. Los extremos relativos solo pueden estar en valores críticos; pero un valor crítico puede no ser extremo ($x^3$ en $x = 0$).

**Teorema de Weierstrass (de los valores extremos).** Si $f$ es continua en un intervalo *cerrado* $[a, b]$, entonces $f$ alcanza en $[a, b]$ un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. Están en un valor crítico interior o en un extremo del intervalo.

**Teorema de Bolzano.** Si $f$ es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, existe al menos un $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$. Geométricamente: una curva continua que





### Ejercicio 4.5.4 · Segundas derivadas: ang tan y paramétrica

*Adaptado de: 2º final 2003-2, tipo A, problema 3.*

a) Sea $y = x \operatorname{ang\,tan} x$; calcule $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}$. b) Para $x = t - 1$, $y = 2t^3 - 1$, calcule $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$.

**Resolución.**

1. a) Regla del producto: $y' = \operatorname{ang\,tan} x + \frac{x}{1+x^2}$.
2. Otra vez, con la regla del cociente en el segundo término:

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

3. En $x = \frac{1}{2}$: $1 + x^2 = \frac{5}{4}$ y $y'' = \frac{2}{25/16} = \frac{32}{25}$.
4. b) $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 6t^2$, así que $\frac{dy}{dx} = 6t^2$.
5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(6t^2)}{dx/dt} = \frac{12t}{1} = 12t$.
6. $x = 1$ corresponde a $t - 1 = 1$, $t = 2$: $\frac{d^2y}{dx^2} = 24$.

**Resultado:** a) $\frac{32}{25}$; b) 24.

### Ejercicio 4.5.5 · Tangentes perpendiculares a una recta

*Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 4.*

Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{1}{x}$ que sean perpendiculares a la recta $x - 9y = 2$.

**Resolución.**

1. La recta dada, $y = \frac{x-2}{9}$, tiene pendiente $\frac{1}{9}$. Las perpendiculares tienen pendiente $-9$.
2. $y' = -\frac{1}{x^2} = -9 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$. Puntos de tangencia: $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$.
3. En $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$: $y - 3 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)$, es decir, $9x + y - 6 = 0$.
4. En $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$: $y + 3 = -9\left(x + \frac{1}{3}\right)$, es decir, $9x + y + 6 = 0$.

**Resultado:** $9x + y - 6 = 0$ y $9x + y + 6 = 0$.

### Ejercicio 4.5.6 · Tangentes horizontales a una circunferencia

*Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.*

Determine los puntos de la curva $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ en los que las rectas tangentes son paralelas a la recta $y = 0$.

**Resolución.**

1. Paralela a $y = 0$ quiere decir horizontal: $y' = 0$.
2. Derivación implícita: $2x + 2yy' = 4 + 4y' \Rightarrow (2y - 4)\,y' = 4 - 2x \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y-2}$.
3. $y' = 0$ exige $x = 2$ (con $y \neq 2$). En la curva: $4 + y^2 = 8 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 4 = 0$.
4. $y = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Ninguno vale 2, así que el denominador no se anula.

### Ejercicio propuesto 4.6.5

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2025-1, tipo D, problema 2.*

Obtenga el área del triángulo que forman los ejes coordenados y la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de ordenada $y = \frac{1}{2}$.

**Resultado:** 2 unidades cuadradas.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

### Ejercicio propuesto 4.6.6

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo A, problema 4.*

Una placa metálica circular de radio 20 cm se calienta y su radio aumenta 0.02 cm. Con la diferencial, estime el aumento del área de la placa y compárelo con el aumento exacto.

**Resultado:** $dA = 0.8\pi$ cm$^2 \approx 2.513$ cm$^2$; el aumento exacto es $\Delta A = 0.8004\pi$ cm$^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

### Ejercicio propuesto 4.6.7

*Adaptado de: 1er final 2005-2, tipo B, problema 2.*

Calcule $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1}$ para la curva $y = \operatorname{sen} 2t$, $x = \cos^2 2t$, con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

**Resultado:** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1} = -\frac{1}{2}$.

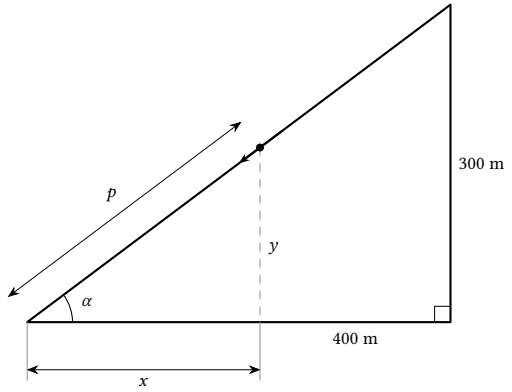
→ Resolución en el Apéndice E, p. 112.

## 4.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar la regla de la cadena.** $(\operatorname{sen} 3x)' = 3\cos 3x$, no $\cos 3x$; $\left(\operatorname{ang\,tan}\sqrt{x}\right)'$ lleva el factor $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. **Derivar $y$ como constante** en la implícita: $\frac{d}{dx}y^2 = 2y\,y'$, no $2y$; $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, no $y'$.
3. **Segunda derivada paramétrica como $\frac{y''(t)}{x''(t)}$.** Se deriva $\frac{dy}{dx}$ respecto a $t$ y se divide entre $\frac{dx}{dt}$.
4. **Evaluar en $x$ cuando la paramétrica pide $t$**: primero se halla el $t$ que corresponde al valor de $x$.
5. **Normal con pendiente** $-m$ en lugar de $-\frac{1}{m}$.
6. **Derivable sin continuidad.** En una función por partes, igualar pendientes no basta: primero los valores.
7. **Sustituir el instante antes de derivar** en razón de cambio: el radio «vale 4» solo en ese instante; si se sustituye antes, su derivada sale cero.
8. **Signo de las razones.** Lo que disminuye (gas que escapa, agua que sale) lleva razón negativa.
9. **Unidades mezcladas** (mm$^3$ con cm, m$^3$ con cm): uniforma antes de sustituir.
10. **Ángulo entre curvas sin valor absoluto**: $\tan\varphi$ negativa da el ángulo obtuso; el ángulo entre curvas es el agudo.
11. **Confundir** $(\cosh u)'$ **con** $(\cos u)'$ SOLO PLAN 2016: la derivada de $\cosh u$ es $+\operatorname{senh} u\,u'$.








**Resolución.**

1. **Variables:** $p$ (sobre la rampa), $x$ (horizontal) y $y$ (altura), funciones de $t$.
2. **Datos:** el esquiador baja hacia el punto más bajo, así que $p$ disminuye: $\frac{dp}{dt} = -10$ m/s. Se pide $\frac{dx}{dt}$.
3. **Ecuación:** la rampa mide $\sqrt{400^2 + 300^2} = 500$ m. Por triángulos semejantes, $\frac{x}{p} = \frac{400}{500}$, es decir, $x = \frac{4}{5}p$.
4. **Derivada:** $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dp}{dt} = \frac{4}{5}(-10) = -8$ m/s.
5. La razón es constante: no depende de dónde esté el esquiador. (La altura cambia a $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{5}(-10) = -6$ m/s.)

**Resultado:** $x$ disminuye a razón de 8 m/s, en cualquier instante.

Nota: el original pide la razón «en el instante en que el esquiador se encuentra a 3 m del punto más bajo»; ese dato no se usa.

### Ejercicio 4.5.9 · Implícita y potencia con exponente variable

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 3.*

SOLO PLAN 2016 Calcule $\frac{dy}{dx}$: a) $x^2y + xy^2 = y - x$; b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

**Resolución.**

1. a) Derivación implícita, con regla del producto en los dos términos de la izquierda:

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = y' - 1.$$

2. Se agrupan los términos con $y'$:

$$\left(x^2 + 2xy - 1\right)y' = -1 - 2xy - y^2 \;\Rightarrow\; y' = \frac{1 + 2xy + y^2}{1 - x^2 - 2xy}.$$

3. b) La variable está en la base y en el exponente: derivación logarítmica (con $x > 0$). $\ln y = \operatorname{sen} x\,\ln x$.

**Diferencial.** Para $y = f(x)$, la diferencial es $dy = f'(x)\,dx$, con $dx = \Delta x$. Para $\Delta x$ pequeño, el incremento verdadero $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ se aproxima con $dy$:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Es la recta tangente usada como aproximación. Ejemplo: con $f(x)=\sqrt{x}$, $x=16$, $\Delta x = 1$: $\sqrt{17} \approx 4 + \frac{1}{2\sqrt{16}}(1) = 4 + \frac{1}{8} = 4.125$ (el valor verdadero es 4.1231…). Cálculo Integral usa esta notación en el cambio de variable: $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$.

**Logaritmo, exponencial e hiperbólicas** SOLO PLAN 2016 . Con $a > 0$, $a \neq 1$:

| Función | Derivada | Función | Derivada |
|---|---|---|---|
| $\ln u$ | $\frac{u'}{u}$ | $\log_a u$ | $\frac{u'}{u \ln a}$ |
| $e^u$ | $e^u\,u'$ | $a^u$ | $a^u \ln a\; u'$ |
| $\operatorname{senh} u$ | $\cosh u\; u'$ | $\cosh u$ | $\operatorname{senh} u\; u'$ |
| $\tanh u$ | $\operatorname{sech}^2 u\; u'$ | $\coth u$ | $-\operatorname{csch}^2 u\; u'$ |
| $\operatorname{sech} u$ | $-\operatorname{sech} u \tanh u\; u'$ | $\operatorname{csch} u$ | $-\operatorname{csch} u \coth u\; u'$ |
| $\operatorname{senh}^{-1} u$ | $\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$ | $\cosh^{-1} u\ (u>1)$ | $\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$ |
| $\tanh^{-1} u\ (\lvert u\rvert<1)$ | $\frac{u'}{1-u^2}$ | | |

Ojo con los signos: $(\cosh u)' = +\operatorname{senh} u\; u'$, a diferencia de $(\cos u)'$. Útiles al simplificar: $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$, $\ln e^u = u$, $e^{\ln u} = u$, $\ln u^n = n \ln u$.

### 4.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «por definición», «método de los cuatro pasos» | el límite del cociente de incrementos | 4.3.1 |
| $y =$ una expresión en $x$, «obtener $\frac{dy}{dx}$» | reglas y cadena | 4.3.2 |
| una segunda derivada evaluada en un punto | derivar dos veces y evaluar | 4.3.2 |
| función por partes con constantes, «continua y derivable» | igualar valores y pendientes | 4.3.3 |
| una ecuación con $x$ y $y$ mezcladas: $\tan(xy) = 2x + y$ | derivación implícita | 4.3.4 |
| $x = x(t)$, $y = y(t)$ | cociente de derivadas respecto a $t$ | 4.3.5 |





**Resultado:** se cumplen las dos hipótesis y la tesis se cumple en $c = \frac{29}{4}$; la tangente en $\left(\frac{29}{4}, \frac{3}{2}\right)$ es paralela a la secante.

#### Ejercicio 5.5.2 · Rolle con un polinomio de grado 4

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 4.*

Sea $f(x) = 2 - 4x^2 + x^4$. Determine si $f$ satisface el teorema de Rolle en el intervalo $\left[1, \sqrt{3}\right]$ y, en caso afirmativo, obtenga los valores del intervalo en los que se cumple.

**Resolución.**

1. **Continuidad en $\left[1, \sqrt{3}\right]$.** Es un polinomio. Se cumple.
2. **Derivabilidad en $\left(1, \sqrt{3}\right)$.** $f'(x) = 4x^3 - 8x$ existe para toda $x$. Se cumple.
3. **Valores en los extremos.** $f(1) = 2 - 4 + 1 = -1$ y $f(\sqrt{3}) = 2 - 12 + 9 = -1$. Son iguales: se cumple.
4. **Tesis:** $f'(c) = 4c(c^2 - 2) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0, c = \pm\sqrt{2}$. Solo $\sqrt{2} \approx 1.41$ está en $\left(1, \sqrt{3}\right) \approx (1, 1.73)$.
5. En $c = \sqrt{2}$ la tangente es horizontal: $f(\sqrt{2}) = 2 - 8 + 4 = -2$.

**Resultado:** se cumplen las tres hipótesis y el teorema se verifica en $c = \sqrt{2}$.

#### Ejercicio 5.5.3 · Raíz cúbica: tangente vertical

*Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 5.*

Para $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ obtenga, si existen: a) los intervalos donde $f$ es creciente o decreciente; b) los máximos y mínimos relativos; c) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Trace la gráfica de $f$.

**Resolución.**

1. La raíz cúbica está definida para todo real: dominio $\mathbb{R}$, y $f$ es continua.
2. $f(x) = (x-1)^{1/3}$, así que
$$f'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$
No se anula nunca y no existe en $x = 1$: único valor crítico, $x = 1$.
3. a) El denominador es positivo (raíz cúbica de un cuadrado): $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$. Como $f$ es continua en $x = 1$, es creciente en todo $\mathbb{R}$.
4. b) $f'$ no cambia de signo en $x = 1$: no hay máximos ni mínimos relativos. Como $f'(x) \to +\infty$ cuando $x \to 1$, en $(1, 0)$ la tangente es vertical.
5. c) Segunda derivada:
$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$
Para $x < 1$, $(x-1)^5 < 0$ y su raíz cúbica también: $f'' > 0$, cóncava hacia arriba. Para $x > 1$: $f'' < 0$, cóncava hacia abajo.
6. La concavidad cambia en $x = 1$ y $f$ es continua ahí: $(1, 0)$ es punto de inflexión, con tangente vertical.
7. Puntos para la gráfica: $f(-7) = -2$, $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, $f(9) = 2$.

*4.3.4 Derivación implícita*

1. Deriva los dos lados respecto a $x$. Cada vez que derives algo con $y$, multiplica por $y'$ (regla de la cadena). Los productos $xy$, $x^2y$ llevan regla del producto.
2. Pasa al lado izquierdo los términos con $y'$ y al derecho los demás.
3. Factoriza $y'$ y despeja.
4. Para una pendiente en un punto, sustituye $x_0$ y $y_0$ en $y'$ (no hace falta despejar $y$ en la curva).

*4.3.5 Derivación paramétrica y segunda derivada*

1. Calcula $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, y forma $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$. Simplifica.
2. Si se pide en un valor de $x$ (o de $y$), encuentra el valor del parámetro $t$ que le corresponde; puede haber dos.
3. Segunda derivada: deriva $\frac{dy}{dx}$ *respecto a* $t$ y divide entre $\frac{dx}{dt}$.
4. Si en el punto pedido $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ (forma $\frac{0}{0}$), simplifica el cociente antes de evaluar o elimina el parámetro.

*4.3.6 Recta tangente y recta normal*

1. **Punto.** Si solo se da una coordenada, obtén la otra con la ecuación de la curva (pueden salir dos puntos; si el enunciado da una condición como $y \geq 0$, úsala).
2. **Pendiente.** $m = y'$ en el punto (directa, implícita o paramétrica).
3. **Rectas.** Tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$; normal con pendiente $-\frac{1}{m}$. Escríbelas en forma general $Ax + By + C = 0$ si lo piden.
4. **Tangente con condición.** Horizontal: $y' = 0$. Paralela a $Ax + By + C = 0$: $y' = -\frac{A}{B}$. Perpendicular: $y' = \frac{B}{A}$. Resuelve la ecuación junto con la de la curva para hallar los puntos de tangencia.
5. **Área de un triángulo.** Intersecta las rectas entre sí y con el eje indicado; el área es $\frac{1}{2}$ base · altura con las intersecciones.

*4.3.7 Ángulo entre dos curvas*

1. Resuelve el sistema de las dos ecuaciones: puntos de intersección.
2. En cada punto, la pendiente de cada curva ($m_1$, $m_2$); si una es recta, su pendiente es fija.
3. $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$ y $\varphi = \text{ang}\tan(\ldots)$. Si $1 + m_1 m_2 = 0$, $\varphi = 90^\circ$. Si una tangente es vertical y la otra tiene pendiente $m$, $\varphi = 90^\circ - \text{ang}\tan|m|$.
4. Si se pide la tangente que forma un ángulo dado con una recta, plantea la ecuación con el valor absoluto: salen dos pendientes.

*4.3.8 Razón de cambio: plantilla de cinco pasos*

1. **Figura y variables.** Dibuja la situación y nombra con letras las cantidades que cambian con el tiempo ($r$, $V$, $x$…). Los datos fijos van con su número.
2. **Datos y pregunta.** Escribe la razón conocida con su signo ($\frac{dV}{dt} = -60$ si disminuye), lo que se pide ($\frac{dA}{dt} = ?$) y el instante ($r = 4$). Uniforma las unidades.
3. **Ecuación.** Relaciona las variables con geometría (volumen, área, Pitágoras, triángulos





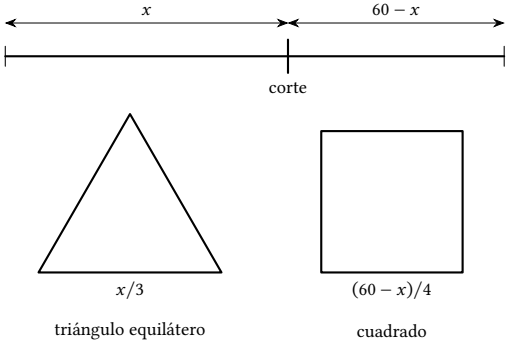
**Resultado:** a) creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$, decreciente en $(-1, 3)$; b) máximo relativo $f(-1) = \frac{11}{3}$, mínimo relativo $f(3) = -7$; c) cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$, hacia arriba en $(1, \infty)$, con inflexión en $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$.

**Ejemplo resuelto · Alambre cortado en dos**

*Adaptado de: 1er final 2012-2, tipo A, problema 5.*

Un alambre de 60 cm se corta en dos partes; con una se forma un triángulo equilátero y con la otra un cuadrado. ¿Qué longitud debe tener cada parte para que la suma de las áreas sea mínima?

**Resolución.**




1. **Variables.** $x$: tramo del triángulo, de lado $\frac{x}{3}$; $60 - x$: tramo del cuadrado, de lado $\frac{60-x}{4}$.
2. **Función objetivo.** Con el área del triángulo equilátero de lado $\ell$, $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{60 - x}{4}\right)^2,$$

es decir,

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(60 - x)^2}{16}.$$

3. **Dominio.** $0 \leq x \leq 60$ (en los extremos todo el alambre va a una sola figura).
4. **Crítico.**

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{60 - x}{8} = 0 \;\Rightarrow\; 8\sqrt{3}\,x = 18(60 - x),$$

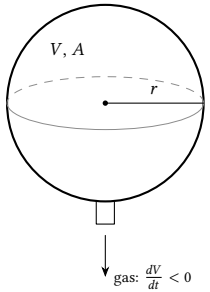
de donde $x = \frac{1080}{18 + 8\sqrt{3}} = \frac{540}{9 + 4\sqrt{3}}$. Racionalizando:

$$x = \frac{540(9 - 4\sqrt{3})}{81 - 48} = \frac{540(9 - 4\sqrt{3})}{33} = \frac{180(9 - 4\sqrt{3})}{11}.$$

**Ejemplo resuelto · Razón de cambio: el globo que pierde gas**

*Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 4.*

Un globo de forma esférica deja escapar gas a razón de 60 $\text{mm}^3/\text{min}$. ¿A qué razón decrece el área del globo en el instante en que el radio es 4 cm?




**Resolución.**

1. **Variables:** radio $r$, volumen $V$ y área $A$ de la esfera, funciones del tiempo $t$ (en minutos).
2. **Datos:** el volumen disminuye, así que $\frac{dV}{dt} = -60\ \text{mm}^3/\text{min}$. Se pide $\frac{dA}{dt}$ cuando $r = 4\ \text{cm} = 40\ \text{mm}$ (todo en milímetros).
3. **Ecuaciones:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $A = 4\pi r^2$.
4. **Derivadas respecto a $t$:**

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}, \qquad \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}.$$

5. **Instante $r = 40$:** de la primera, $\frac{dr}{dt} = \frac{-60}{4\pi(40)^2} = -\frac{3}{320\pi}$ mm/min. En la segunda:

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(40)\left(-\frac{3}{320\pi}\right) = -3\ \text{mm}^2/\text{min}.$$

6. Atajo: al dividir las dos derivadas, $\frac{dA}{dt} = \frac{2}{r}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{40}(-60) = -3$.

**Resultado:** el área decrece a razón de 3 $\text{mm}^2/\text{min}$ (0.03 $\text{cm}^2/\text{min}$).

## 4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 4.5.1 · Ang sec y potencias

*Adaptado de: 1er final 2006-1, tipo B, problema 4.*

Obtenga $\frac{dy}{dx}$ para: a) $y = \operatorname{ang\,sec}(3x)$; b) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

**Resolución.**





3. Hay inflexión en un candidato solo si el signo cambia y $c$ está en el dominio. Da las coordenadas $(c, f(c))$.
4. Si el enunciado pide el criterio de la segunda derivada, evalúa $f''$ en cada crítico con $f'(c) = 0$: negativo, máximo; positivo, mínimo.

#### *5.3.4 Tabla de variación y gráfica*

1. Reúne en una tabla los críticos y los candidatos a inflexión, ordenados, con los signos de $f'$ y $f''$ entre ellos.
2. Renglón de $f$: ↗ (crece) o ↘ (decrece), y los valores de $f$ en los puntos de la tabla.
3. Ubica en la gráfica: extremos, inflexiones, intersecciones con los ejes ($f(0)$ y, si es fácil, los ceros), asíntotas.
4. Une los puntos respetando el crecimiento y la concavidad de cada tramo.
5. Donde $f'$ no existe: si $f' \to \pm\infty$ dibuja una tangente vertical; si las pendientes laterales son distintas, un pico.

#### *5.3.5 Extremos absolutos en un intervalo cerrado*

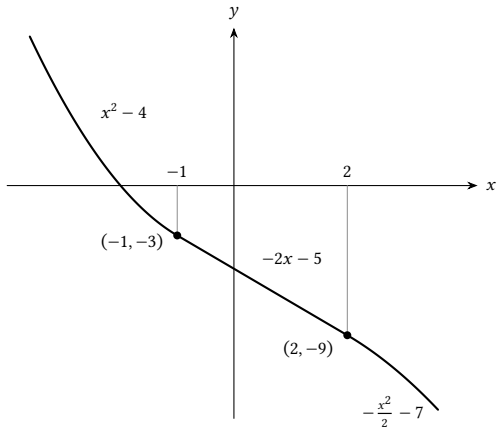
1. Revisa que $f$ sea continua en $[a, b]$: por el teorema de Weierstrass, existen los dos extremos absolutos.
2. Encuentra los críticos de $(a, b)$.
3. Evalúa $f$ en los críticos y en $a$ y $b$.
4. El mayor valor es el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto. No hace falta ningún criterio.

#### *5.3.6 Optimación: plantilla*

1. **Dibujo y variables.** Haz un esquema y nombra cada medida que cambia ($x$, $y$, $r$, $h$).
2. **Función objetivo.** Lo que se quiere hacer máximo o mínimo, en función de las variables: área, volumen, perímetro, material, costo.
3. **Restricción.** La ecuación que liga las variables: el dato fijo (perímetro, volumen, área) o la condición geométrica (el punto está en la curva, triángulos semejantes).
4. **Una variable.** Despeja de la restricción y sustituye en la función objetivo.
5. **Dominio.** Los valores con sentido físico (longitudes positivas, el punto dentro de la figura).
6. **Crítico.** Deriva, iguala a cero y resuelve en el dominio.
7. **Justifica** que es máximo o mínimo: con la segunda derivada, con el cambio de signo de la primera o comparando con los extremos del dominio.
8. **Responde** lo que se pide: todas las dimensiones, el valor óptimo y las unidades.

#### *5.3.7 Punto de inflexión con parámetros*

1. «El punto $(x_0, y_0)$ está en la gráfica»: $g(x_0) = y_0$.
2. «Es punto de inflexión»: $g''(x_0) = 0$.
3. Resuelve el sistema y comprueba que $g''$ cambia de signo en $x_0$.




**Resultado:** $a=-2$, $b=-5$.

### Ejercicio 4.5.3 · Implícita con tangente y cadena con raíz

*Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 3.*

Obtenga $\frac{dy}{dx}$: a) $x^2\tan y = x+y$; b) $y=\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}$.

**Resolución.**

1. a) Derivación implícita (producto a la izquierda):

$$2x\tan y + x^2\sec^2 y\, y' = 1 + y'.$$

2. Se agrupa y se despeja:

$$\left(x^2\sec^2 y - 1\right)y' = 1 - 2x\tan y \;\Rightarrow\; y' = \frac{1-2x\tan y}{x^2\sec^2 y - 1}.$$

3. b) Con $u=\frac{2x}{2x-1}$, $y=\sqrt{u}$ y $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Regla del cociente:

$$u' = \frac{2(2x-1)-2x(2)}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}.$$

4. Entonces

$$y' = -\frac{2}{(2x-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}} = -\frac{1}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{2x}},$$

válida en $x<0$ o $x>\frac{1}{2}$, donde la raíz existe y la derivada también.

**Resultado:** a) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x\tan y}{x^2\sec^2 y-1}$; b) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}$.





pasa de abajo a arriba del eje $x$ lo corta.

**Teorema de Rolle.** Hipótesis:

1. $f$ es continua en $[a,b]$;
2. $f$ es derivable en $(a,b)$;
3. $f(a)=f(b)$.

Tesis: existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$. Interpretación: entre dos puntos de la gráfica a la misma altura hay uno con **tangente horizontal**.

**Teorema del valor medio del cálculo diferencial** (de Lagrange). Hipótesis: las dos primeras de Rolle. Tesis: existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Interpretación: hay un punto donde la **tangente es paralela a la secante** que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$. Rolle es el caso $f(a)=f(b)$.

**Crecimiento.** Si $f'(x)>0$ en un intervalo, $f$ es creciente ahí; si $f'(x)<0$, es decreciente. Es consecuencia del teorema del valor medio.

**Criterio de la primera derivada.** Sea $c$ un valor crítico con $f$ continua en $c$. Si $f'$ cambia de + a − al pasar por $c$, en $c$ hay un máximo relativo; si cambia de − a +, un mínimo relativo; si no cambia de signo, no hay extremo.

**Concavidad.** Si $f''(x)>0$ en un intervalo, la gráfica es *cóncava hacia arriba* (∪): queda arriba de sus tangentes. Si $f''(x)<0$, es *cóncava hacia abajo* (∩). Un *punto de inflexión* es un punto $(c,f(c))$ de la gráfica, con $f$ continua en $c$, donde la concavidad cambia. Los candidatos son los $c$ con $f''(c)=0$ o $f''(c)$ inexistente; hay inflexión solo si $f''$ cambia de signo ($x^4$ tiene $f''(0)=0$ y no tiene inflexión).

**Criterio de la segunda derivada.** Si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$, en $c$ hay un máximo relativo; si $f''(c)>0$, un mínimo relativo; si $f''(c)=0$, el criterio no decide y se usa el de la primera derivada.

**Picos y tangentes verticales.** Donde $f$ es continua y $f'$ no existe puede haber:

- un *pico*: $|x|$ en $x=0$; las pendientes laterales son distintas y hay mínimo;
- una *cúspide*: $x^{2/3}$ en $x=0$; $f'\to\mp\infty$ por cada lado y también hay mínimo;
- una *tangente vertical* sin extremo: $\sqrt[3]{x}$ en $x=0$; $f'\to+\infty$ por los dos lados, $f$ sigue creciendo y la concavidad cambia: es punto de inflexión.

## 5.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice… | Se pide… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «determinar si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle» o «del valor medio» | revisar cada hipótesis y hallar $c$ | 5.3.1 |
| «intervalos donde es creciente o decreciente», «máximos y mínimos relativos», «valores críticos» | signo de $f'$ | 5.3.2 |

5. Comprobación: la curva es la circunferencia $(x-2)^2+(y-2)^2=8$, de centro $(2,2)$ y radio $2\sqrt{2}$; las tangentes horizontales están arriba y abajo del centro.

**Resultado:** $\big(2,\ 2+2\sqrt{2}\big)$ y $\big(2,\ 2-2\sqrt{2}\big)$.

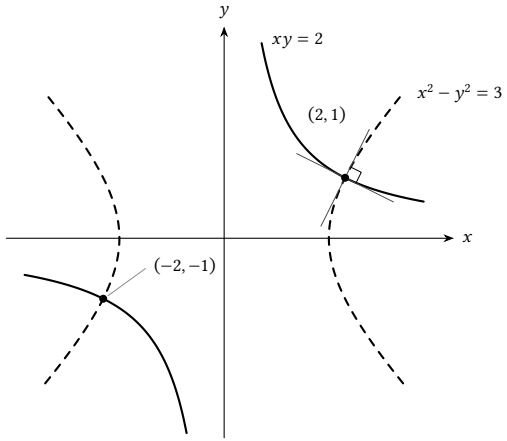
### Ejercicio 4.5.7 · Ángulo entre dos hipérbolas

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 4.*

Sean las curvas $C_1:\ xy=2$ y $C_2:\ x^2-y^2=3$. Determine el ángulo de intersección entre $C_1$ y $C_2$.

**Resolución.**

1. Intersección: de $C_1$, $y=\frac{2}{x}$. En $C_2$: $x^2-\frac{4}{x^2}=3\Rightarrow x^4-3x^2-4=0\Rightarrow(x^2-4)(x^2+1)=0$. Entonces $x=\pm2$: puntos $(2,1)$ y $(-2,-1)$.
2. Pendientes por derivación implícita. $C_1$: $y+xy'=0\Rightarrow m_1=-\frac{y}{x}$. $C_2$: $2x-2yy'=0\Rightarrow m_2=\frac{x}{y}$.
3. En $(2,1)$: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. Entonces $1+m_1m_2=1-1=0$: las tangentes son perpendiculares.
4. En $(-2,-1)$: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. Mismo resultado.
5. En general $m_1m_2=-\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=-1$ en cualquier punto común: las dos familias de hipérbolas son ortogonales.




**Resultado:** $\varphi=90^\circ$ en los dos puntos de intersección, $(2,1)$ y $(-2,-1)$.

### Ejercicio 4.5.8 · Razón de cambio: el esquiador en la rampa

*Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 4.*

Un esquiador se desliza a razón de 10 m/s sobre una rampa en forma de plano inclinado, de 400 m de base horizontal y 300 m de altura. Sea $p$ su distancia, medida sobre la rampa, al punto más bajo, y $x$ la proyección horizontal de esa distancia. Determine la rapidez con la que cambia $x$.





12. $x^{\operatorname{sen} x}$ **con la regla de la potencia** SOLO PLAN 2016: con la variable en el exponente se usa derivación logarítmica.

## 4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ · derivable ⇒ continua.
- $(uv)'=uv'+vu'\cdot\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}\cdot(u^n)'=nu^{n-1}u'\cdot\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(\operatorname{sen}u)'=\cos u\,u'\cdot(\cos u)'=-\operatorname{sen}u\,u'\cdot(\tan u)'=\sec^2u\,u'\cdot(\sec u)'=\sec u\tan u\,u'$.
- $(\cot u)'=-\csc^2u\,u'\cdot(\csc u)'=-\csc u\cot u\,u'$.
- $(\operatorname{ang\,sen}u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\cdot(\operatorname{ang\,tan}u)'=\frac{u'}{1+u^2}\cdot(\operatorname{ang\,sec}u)'=\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$; las «co» llevan signo menos.
- Inversa: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{dy/dx}$.
- Paramétrica: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.
- Tangente $y-y_0=m(x-x_0)\cdot$ normal con $-\frac{1}{m}\cdot Ax+By+C=0$ tiene $m=-\frac{A}{B}$.
- $\tan\varphi=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|\cdot m_1m_2=-1\Rightarrow\varphi=90^\circ$.
- Razón de cambio: figura, datos con signo, ecuación, derivar respecto a $t$, sustituir al final.
- Esfera $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, $A=4\pi r^2\cdot$ cilindro $V=\pi r^2h\cdot$ cono $V=\frac{1}{3}\pi r^2h\cdot$ círculo $A=\pi r^2$.
- Diferencial: $dy=f'(x)\,dx\cdot f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$.
- SOLO PLAN 2016 $(\ln u)'=\frac{u'}{u}\cdot(e^u)'=e^uu'\cdot(a^u)'=a^u\ln a\,u'\cdot(\operatorname{senh}u)'=\cosh u\,u'\cdot(\cosh u)'=\operatorname{senh}u\,u'\cdot(\tanh u)'=\operatorname{sech}^2u\,u'$.
- SOLO PLAN 2016 $y=f^g$: $\ln y=g\ln f$, $y'=f^g\left(g'\ln f+g\frac{f'}{f}\right)$.

## 4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Reconoce el tipo con la tabla 4.2 y escribe la fórmula que vas a usar antes de calcular.
2. En las derivadas, reescribe raíces como potencias y deriva capa por capa; en la implícita, marca cada $y'$.
3. En tangente y normal: punto completo, pendiente, punto-pendiente; da la forma general si la piden.
4. En razón de cambio, sigue los cinco pasos con su rótulo; sustituye el instante solo al final y di si la cantidad aumenta o disminuye.
5. Comprueba: el punto está en la curva, las pendientes de rectas perpendiculares multiplican $-1$, las unidades cuadran.

Si no terminas una razón de cambio, la figura, los datos con signo y la ecuación derivada ya valen buena parte del problema.

4. Derivando implícitamente:

$$\frac{y'}{y} = \cos x\, \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

5. Se multiplica por $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

**Resultado:** a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2xy+y^2}{1-x^2-2xy}$; b) $\frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$.

### Ejercicio 4.5.10 · Derivada por definición de una raíz

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º parcial 2024-1, tipo C, problema 1.*

Determine la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con el método de los cuatro pasos, es decir, con la definición de derivada.

**Resolución.**

1. $f(x+h) = \frac{1}{\sqrt{x+h}}$, con $x > 0$.
2. Incremento, con denominador común:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}.$$

3. Se divide entre $h$ y se racionaliza el numerador (por $\sqrt{x} + \sqrt{x+h}$):

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}.\end{aligned}$$

4. Límite con $h \to 0$:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

5. Comprobación con la regla de la potencia: $\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$.

**Resultado:** $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$, para $x > 0$.

## 4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4**.

### Ejercicio propuesto 4.6.1

*Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 4.*

Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$G: \begin{cases} x^2 = \operatorname{sen}^2\theta, \\ y = \cos^2\theta, \end{cases}$$





en el punto de ordenada $\frac{3}{4}$ y abscisa positiva.

**Resultado:** $4x + 4y - 5 = 0$, tangente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

### Ejercicio propuesto 4.6.2

*Adaptado de: 2º final 2006-2, tipo A, problema 4.*

La tangente a la curva $y = x^2$ en un punto $P$ corta a la recta $3x - y + 1 = 0$ formando un ángulo de 45°. Determine las coordenadas de $P$.

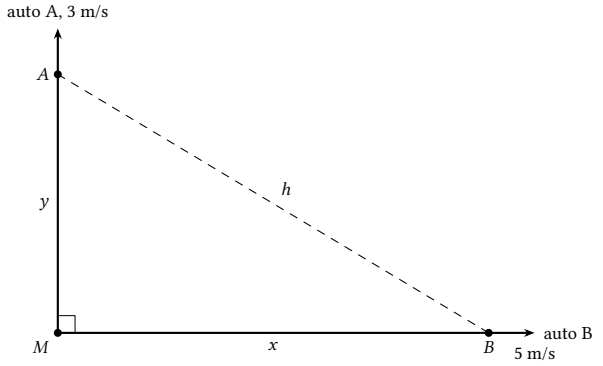
**Resultado:** $P(-1, 1)$ o $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

### Ejercicio propuesto 4.6.3

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 3.*

Dos autos parten al mismo tiempo de un punto $M$ en direcciones perpendiculares, como en la figura. El auto A va a 3 m/s y el auto B a 5 m/s. Determine la rapidez con que aumenta la distancia $h$ entre ellos en el instante en que el auto A ha recorrido 9 m.




**Resultado:** $\frac{dh}{dt} = \sqrt{34}$ m/s $\approx 5.83$ m/s.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

### Ejercicio propuesto 4.6.4

*Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2020-1, problema 3.*

SOLO PLAN 2016 Obtenga $\frac{dy}{dx}$: a) $e^{xy} - x = \ln e^y$; b) $x = 3\operatorname{senh}(3t)$, $y = 2\cosh(3t)$.

**Resultado:** a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y\,e^{xy}}{x\,e^{xy}-1}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\tanh(3t)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.